

1. 10 punktów

Powiemy, że dwa wierzchołki w grafie są *parzysto-odległe* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje pomiędzy nimi ścieżka (wierzchołki i krawędzie mogą się powtarzać) o parzystej długości.

(a) 3 punkty

Udowodnij, że relacja parzystej odległości jest relacją równoważności.

(b) 7 punktów

Zaproponuj efektywny algorytm, który dla danego grafu G obliczy klasy abstrakcji relacji parzystej odległości. Uzasadnij poprawność zaproponowanego algorytmu i zanalizuj jego złożoność — czasową i pamięciową.

2. 8 punktów

Wykaż, że istnieje AVL-drzewo o wysokości 10 (wysokość to długość najdłuższej ścieżki od korzenia do węzła wewnętrzznego), które zawiera co najmniej 1364 węzłów zewnętrznych takich, że umieszczenie w każdym z nich nowego klucza wymaga wykonania rotacji (pojedynczej lub podwójnej) dla przywrócenia równowagi w drzewie.

Uwaga: Za wskazanie tylko drzewa o więcej niż 1200 węzłach zewnętrznych o tej własności można otrzymać 4 punkty.

3. 12 punktów

Dane są dwie uporządkowane rosnąco tablice $A[1..n]$ i $B[1..n]$ zawierające $2n$ różnych elementów oraz liczba całkowita k , $1 \leq k \leq 2n$.

(a) 6 punktów

Zaproponuj algorytm, który za pomocą możliwie małej liczby porównań pomiędzy elementami zbioru $A \cup B$ znajdzie takie dwa indeksy a i b , że $A[1..a] \cup B[1..b]$ to podzbiór k najmniejszych elementów zbioru $A \cup B$. Uzasadnij poprawność swojego algorytmu i zanalizuj liczbę porównań w pesymistycznym przypadku.

(b) 6 punktów

Jaka jest dolna granica na liczbę porównań w tym zadaniu? Odpowiedź uzasadnij.

4. 10 punktów

Zaprojektuj strukturę danych umożliwiającą efektywne wykonywanie następujących operacji na permutacji $p[1..n]$ liczb $1..n$:

Inicjalizacja:: dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$, $p[i] := i$. Ta operacja jest wykonywana tylko raz jako pierwsza.

Zamień(i, j):: jeśli i oraz j należą do różnych cykli permutacji p , to zamień wartości $p[i]$ i $p[j]$.

Długość(i):: podaj długość cyklu w permutacji p zawierającego i .

Uzasadnij poprawność i zanalizuj złożoność poszczególnych operacji w zaproponowanym rozwiązaniu.