Egzamin z ASD
28.01.2011

Zadanie 1 [11 punktów]

Dana jest tablica $a[1..n]$ parami różnych elementów pochodzących ze zbioru z liniowym porządkiem. Należy posortować tablicę a rosnąco. Jedyną operacją służącą do porównywania elementów między sobą jest funkcja $ile(x,y)$, której wynikiem jest liczba całkowita k zdefiniowana tak, że

$$|k| = |\{1 \le i \le n\colon \min(x,y) \le a[i] \le \max(x,y)\}|.$$

Wartość k jest ujemna tylko wtedy, gdy x jest mniejsze od y.

1a) [3 punkty] Udowodnij, że każdy algorytm sortujący a wywoła funkcję *ile* w pesymistycznym przypadku co najmniej n-1 razy.

1b) [8 punktów] Zaproponuje algorytm sortowania a w miejscu za pomocą co najwyżej $O(n)$ wywołań funkcji *ile* i $O(n)$ zamian.

Zadanie 2 [15 punktów]

W tym zadaniu rozważamy algorytm QuickSort użyty do posortowania permutacji liczb 1, 2, …, n zapisanej w tablicy $a[1..n]$, przy założeniu, że funkcja podziału działa w następujący sposób:

- elementem dzielącym jest zawsze pierwszy element dzielonego fragmentu tablicy,
- podczas podziału elementy z danego fragmentu są porównywane tylko z elementem dzielącym,
- po wykonaniu podziału zarówno elementy mniejsze od elementu dzielącego, jak i elementy większe, występują w takiej samej kolejności, co przed podziałem.

Dla danej permutacji proces sortowania można przedstawić za pomocą drzewa binarnego, w którym w węzłach znajdują się elementy dzielące, a poddrzewa odpowiadają wywołaniom rekurencyjnym.

2a) [2 punkty] Narysuj drzewo sortowania dla permutacji 3, 2, 5, 1, 4, 6, 7, 9, 8.

2b) [2 punkty] Uzasadnij, że suma głębokości węzłów w drzewie jest równa liczbie wykonywanych porównań podczas sortowania.

2c) [11 punktów] Zaproponuj algorytm, który dla danej permutacji $a[1..n]$ obliczy w czasie $O(n\log n)$ liczbę porównań wykonywanych przez QuickSort podczas sortowania a.

Zadanie 3 [7 punktów]

Dany jest (przez listy sąsiedztwa) graf $G=(V,E)$ oraz wyróżniony wierzchołek s. Każdemu wierzchołkowi przypisano dodatnią liczbę całkowitą. Zaproponuj algorytm, który obliczy długość najdłuższej ścieżki o początku w s, na której liczby przypisane kolejnym wierzchołkom tworzą ciąg (ściśle) malejący.

Zadanie 4 [7 punktów]

Dana jest tablica $P[0..n]$ nieujemnych liczb całkowitych.

4a) [5 punktów] Zaproponuj algorytm, który efektywnie sprawdzi, czy P jest tablicą prefiksów-sufiksów z algorytmu KMP dla pewnego słowa nad alfabetem $\{a,b\}$? Uwaga: kolejne symbole słowa są indeksowane od 1. $P[0]$ odpowiada słowu pustemu.

4b) [2 punkty] Czy istnieje słowo nad alfabetem $\{a,b\}$, dla którego $P = [0,0,1,0,1,2,3,4,1,2]$ jest tablicą prefiksów-sufiksów?

Uzasadnij poprawność swoich rozwiązań i dokonaj analizy złożoności obliczeniowej zaproponowanych algorytmów.