Egzamin z ASD
27.01.2012

1. (25 punktów)

   Niech T będzie n-węzłowym drzewem binarnym, w którego węzłach zapisano liczby całkowite – klucze. Drzewo jest zadane przez wskaźnik do korzenia, a każdy węzeł ma wskaźniki do lewego i prawego syna oraz ojca (być może któryś z nich jest pusty).

   (a) (3 punktów)
   Zaprojektuj efektywny algorytm, który dla każdego węzła wyznaczy największy klucz z jego poddrzewa.

   (b) (22 punkty)
   Oto szkic rekurencyjnego algorytmu wyznaczania dla każdego węzła v liczby węzłów z jego poddrzewa z kluczami większymi od klucza z v.

   Rozwiąż zadanie rekurencyjnie dla lewego i prawego poddrzewa, a następnie obejdź całe drzewo i policz ile jest kluczy większych od tego w korzeniu.

   (b1) (3 punkty): Ile wynosi pesymistyczna złożoność powyższego algorytmu?
   (b2) (3 punkty): Podaj złożoność tego algorytmu w przypadku, gdy T jest pełnym drzewem binarnym.
   (b3) (7 punktów): Zaproponuj algorytm, który w czasie $O(\mid T \mid \log \mid T \mid)$ policzy dla każdego węzła v liczbę węzłów z kluczami większymi od klucza w v, na ścieżce z v do korzenia.
   (b4) (9 punktów): Zaproponuj algorytm, który w czasie $O(\mid T \mid \log \mid T \mid)$ policzy dla każdego węzła v liczbę węzłów w jego poddrzewie z większymi kluczami.

2. (6 punktów)

   Niech n będzie liczbą całkowitą większą od 2 i taką, że $n = 2^k$, dla pewnego $k > 1$.

   (a) (3 punkty)
   Dla każdego n spełniającego powyższy warunek podaj przykład n-wierzchołkowego grafu dwuspójnego o minimalnej liczbie krawędzi, dla którego jedno z drzew przeszukiwania w głąb (przy pewnym

uporządkowaniu list sąsiedztw) jest zbudowane z korzenia r, jego jedynego syna u i pełnego drzewa binarnego (lewy, prawy syn nie mają tu znaczenia) o korzeniu w u. Poniżej przykład drzewa dla $n = 4$.

```
  *
  |
  *
 / \
*   *
```

(b) (3 punkty)

Ile maksymalnie krawędzi może być w dwuspójnym grafie n-wierzchołkowym, którego pewne drzewo przeszukiwania w głąb jest drzewem opisanym w poprzednim punkcie?

3. (9 punktów)

Dana jest tablica $a[1..n]$ liczb całkowitych, o których wiadomo, że dla każdej z nich tablica zawiera co najmniej $\lceil n/2012 \rceil$ liczb odległych od niej nie więcej niż o n. Zaproponuj liniowy algorytm sortowania tablicy a.

Uzasadnij poprawność swoich odpowiedzi i dokonaj analizy złożoności obliczeniowej zaproponowanych algorytmów.
Uwaga: rozwiązanie każdego punktu należy zapisać **czytelnie** na co najwyżej dwóch stronach formatu A4, każdy punkt na oddzielnych podpisanych kartkach; rozwiązania nieczytelne nie będą sprawdzane.