

Egzamin z ASD

1.02.2013

Zadanie 1 [15 punktów]

W prostokątnym układzie współrzędnych danych jest n odcinków równoległych do osi OX lub do osi OY, o końcach w punktach o współrzędnych całkowitych z przedziału $[0, n^3]$ i długościach nie większych od 5.

- [5 punktów] Zaproponuj strukturę danych o rozmiarze $O(n)$, która umożliwi odpowiadanie w czasie $O(\log n)$ na pytanie, czy punkt (a, b) o współrzędnych całkowitych jest pokrywany przez któryś z podanych odcinków.
- [5 punktów] Zaproponuj liniowy algorytm, który w czasie $O(n)$ oblicza liczbę wszystkich punktów pokrywanych przez zadane odcinki.
- [5 punktów] Zaproponuj liniowy algorytm, który policzy liczbę wszystkich par przecięć odcinków pionowych z poziomymi.

Zadanie 2 [7 punktów]

Oto algorytm SelectionSort sortujący n -elementową tablicę $a[1..n]$:

```
for  $i := n$  downto 2 do {  
     $max := 1$ ;  
    for  $j := 2$  to  $i$  do  
        if  $a[j] > max$  then  $max := j$ ;  
     $a[i] := a[max]$  // zamiana elementów  
}
```

Zaprojektuj efektywny algorytm, który dla danej tablicy a obliczy ile razy algorytm SelectionSort zamienia elementy w tablicy.

Zadanie 3 [9 punktów]

Grafy trójkątne to grafy spójne, w których każda dwuspójna składowa jest trójkątem (cyklem długości 3).

- [3 punkty] Udowodnij, że każdy graf trójkątny jest 3-kolorowalny.
- [3 punkty] Zaproponuj efektywny algorytm 3-kolorowania grafów trójkątnych.
- [3 punkty] Zaproponuj efektywny algorytm obliczania rozmiaru najliczniejszego skojarzenia w danym grafie trójkątnym.

Zadanie 4 [9 punktów]

Zaproponuj algorytm dodania do n -elementowego, zupełnego kopca binarnego k kluczy jednocześnie w czasie $O(k + \log^2 n)$.

Uwaga: w rozwiązaniu każdego zadania uzasadnij poprawność swojej odpowiedzi oraz dokonaj analizy złożoności obliczeniowej zaproponowanych algorytmów.