Egzamin z ASD
29.01.2019

Zadanie 1 [6 punktów]

Dane są dwie liczby całkowite dodatnie n i m oraz $n+m$ domkniętych przedziałów liczb całkowitych – n przedziałów białych i m przedziałów czerwonych. Każdy przedział zadany jest jako para liczb wyznaczających odpowiednio lewy i prawy koniec przedziału. Wszystkie końce przedziałów są parami różne. Zaprojektuj efektywny algorytm, który oblicza liczbę par różnokolorowych przedziałów, w których przedział czerwony jest całkowicie zawarty w przedziale białym.

Zadania 2 [14 punktów]

W tym zadaniu rozważamy słowa zbudowane z cyfr 0, 1, …, 9. Każde takie słowo można traktować jako zapis w układzie dziesiętnym pewnej nieujemnej liczby całkowitej. Zaprojektuj efektywny algorytm, który dla danego niepustego słowa x:

a) **[3 punkty]** obliczy liczbę wszystkich takich par indeksów (i, j), $1 \le i \le j \le |x|$, że słowo $x[i..j]$ jest zapisem liczby podzielnej przez 3;
b) **[4 punkty]** wyznaczy taką parę indeksów (i, j), $1 \le i \le j \le |x|$, że słowo $x[i..j]$ jest zapisem największej liczby podzielnej przez 3 wśród wszystkich podsłów słowa x;
c) **[7 punktów]** obliczy liczbę wszystkich parami różnych podsłów (różniących się długością lub znakami na odpowiadających sobie pozycjach) słowa x będących zapisami liczb podzielnych przez 3

Zadanie 3 [6 punktów]

Niech S będzie dynamicznym, skończonym zbiorem liczb całkowitych, każda pokolorowana na biało lub czerwono. Początkowo zbiór S jest pusty, a następnie wykonujemy na nim ciąg operacji postaci:

Insert(x,k): wstaw do S element x o kolorze k;
Delete(x,k): usuń z S element x koloru k;
Gap(): funkcja której wartością jest minimalna wartość bezwzględna różnicy dwóch różnokolorowych elementów w zbiorze S lub -1, gdy w S nie ma elementów o różnych kolorach.

Zaprojektuj efektywną strukturę danych dla zbioru S.

Zadanie 4 [14 punktów]

Niech $a[1..\ n+2]$ będzie tablicą liczb całkowitych z przedziału [1,n], dla pewnego dodatniego n. Grafem G_a nazywamy nieskierowany graf (V,E), w którym $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, natomiast $E = \{i — j : i \neq j$ oraz $\{a[i], a[i+1], a[i+2]\} \cap \{ a[j], a[j+1], a[j+2]\} \neq \emptyset\}$.

a) **[2 punkty]** Jaka może być maksymalna wysokość DFS-drzewa w grafie G_a o korzeniu w wierzchołku 1?
b) **[2 punkty]** Jaka może być maksymalna wysokość BFS-drzewa w grafie G_a o korzeniu w wierzchołku 1?.
c) **[2 punkty]** Udowodnij, że graf G_a jest dwuspójny wierzchołkowo (jest spójny i nie zawiera wierzchołków rozdzielających).
d) **[8 punktów]** Przyjmijmy, że wagą krawędzi $i — j$ jest wartość najmniejszego elementu w zbiorze $\{a[i], a[i+1], a[i+2]\} \cap \{ a[j], a[j+1], a[j+2]\} \neq \emptyset$. Zaprojektuj efektywny algorytm, który dla danej tablicy a oblicza wagę najlżejszego drzewa rozpinającego dla grafu G_a.

Uzasadnij poprawność swoich rozwiązań i przeprowadź analizę złożoności obliczeniowej zaproponowanych algorytmów.