Egzamin z ASD
4.02.2020

Zadanie 1 [7 punktów]
Zaproponuj optymalny ze względu na porównania algorytm sortujący 6 różnych liczb *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, o których wiadomo, że $a < b$ oraz $c < d$.

a) [3 punkty] Wykaż, że każdy taki algorytm wymaga wykonania w pesymistycznym przypadku co najmniej 8 porównań.
b) [4 punkty] Zaprojektuj algorytm, który sortuje liczby *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* wykonując w pesymistycznym przypadku co najwyżej 8 porównań.

Zadanie 2 [10 punktów]

a) [2 punkty] Podaj, ile wynosi największa wysokość DFS-drzewa, a ile BFS-drzewa, w *n*-wierzchołkowym grafie dwuspójnym, dla $n > 2$?
b) [2 punkty] Podaj, ile wynosi najmniejsza wysokość DFS-drzewa, a ile BFS-drzewa, w *n*-wierzchołkowym grafie dwuspójnym, dla $n > 2$?
c) [6 punktów] Zaproponuj wydajny algorytm, który sprawdza, czy w grafie silnie spójnym istnieje (skierowana) marszruta zamknięta o długości nieparzystej [3 punkty], a następnie znajduje jedną z takich marszrut [3 punkty].

Zadanie 3 [6 punktów]
Powiemy, że dwa ciągi liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n$ są podobne, gdy istnieje takie *c*, że $b_i = c*a_i$, dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$. Zaprojektuj wydajny algorytm, który dla danych dwóch ciągów dodatnich liczb całkowitych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oraz $y_1, y_2, \ldots, y_m$, $n \le m$, wyznacza w ciągu *y* wszystkie pozycje *i* takie, że podciąg $yi, y_{i+1}, \ldots, y_{i+n-1}$ oraz ciąg *x* są podobne.

Zadanie 4 [17 punktów]
Rozważmy następujący algorytm sortowania *n* różnych liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ w porządku malejącym.

Algorytm Szymka R.

```
X := {x1, x2, …, xn};
Zainicjuj stos S jako pusty;
while Not Empty(X) do{
        weź dowolny element x ze zbioru X;
        X := X \ {x};
        Usuń ze stosu S wszystkie elementy większe od x i wstaw je z powrotem do zbioru X;
        Umieść x na wierzchołku stosu S;
}
Wypisz kolejno elementy ze stosu S;
```

Przyjmijmy, że operacjami dominującymi są operacje stosowe Top, Push, Pop.

a) **[6 punktów]** Jaka jest pesymistyczna złożoność sortowania algorytmem Szymka R.?

Załóżmy teraz. że element *x* wybieramy losowo ze zbioru *X* z rozkładem jednostajnym – każdy element może zostać wylosowany z prawdopodobieństwem $1/|X|$.

b) **[6 punktów]** Udowodnij, że oczekiwana liczba losowań w algorytmie elementu *x* ze zbioru *X* wynosi $O(n^2)$.
c) **[5 punktów]** Dokonaj analizy oczekiwanej liczby operacji dominujących w algorytmie Szymka R. w opisanym wyżej modelu probabilistycznym.

Uwaga: w każdym zadaniu uzasadnij poprawność swojego rozwiązania i dokonaj analizy złożoności obliczeniowej zaproponowanych algorytmów.