Zadanie 1 [14 punktów]

Grafem klik nazywamy graf spójny, w którym każda dwuspójna składowa jest kliką. W tym zadaniu zakładamy, że wierzchołkami grafu klik są kolejne liczby naturalne poczynając od 1 oraz kliki są ponumerowane kolejno 1, 2, … .

a) **[2 punkty]** Podaj najmniejszą i największą liczbę klik w n-wierzchołkowym grafie klik.

b) **[2 punkty]** Jaka może być najmniejsza, a jaka największa liczba krawędzi w 2021-wierzchołkowym grafie klik o 100 klikach?

c) **[3 punkty]** Dokonaj analizy liczby możliwych numeracji DFS rozpoczynających się w wierzchołku 1 w zadanym grafie klik o dokładnie dwóch klikach, każda składająca się z 10 wierzchołków. Dwie numeracje uznajemy za różne, gdy istnieje wierzchołek, który ma różne numery w obu numeracjach.

Niech G będzie n-wierzchołkowym grafem klik o dokładnie k klikach. Zwartą reprezentacją grafu G nazwiemy graf dwudzielny Z(G) = (X,Y,F), w którym X = {1, 2, …, n} oraz Y = {1, 2, …, k} są odpowiednio zbiorami wierzchołków i klik w grafie G, natomiast zbiorem krawędzi jest F = {x – y: x ∈ X, y ∈ Y oraz wierzchołek x jest w klice y}.

d) **[7 punktów]** Dana jest zwarta reprezentacja Z(G) grafu klik G. Zaproponuj wydajny algorytm, który obliczy długość najdłuższej ścieżki elementarnej w grafie G.

Zadanie 2 [7 punktów]

Na początkowo pustym n-wierzchołkowym grafie G, n > 0, którego wszystkie wierzchołki są pokolorowane na biało, wykonujemy operacje:

Kolor(v,c):: pokoloruj wierzchołek v na kolor c, gdzie c ∈ {biały, czerwony}
Dodaj(v,u):: dodaj krawędź łączącą wierzchołki v, u do grafu G
ZbalansowaneSkładowe():: podaj liczbę zbalansowanych spójnych składowych w grafie G, tzn. takich, w których liczby wierzchołków białych i czerwonych różnią się co najwyżej o 1.

Przyjmij, że wierzchołkami grafu są liczby 1, 2, …, n. Zaproponuj strukturę danych, która umożliwi wykonanie ciągu m operacji Kolor, Dodaj, ZbalansowaneSkładowe, gdzie m ≥ n, w możliwie małym koszcie zamortyzowanym.

Zadanie 3 [12 punktów]

Dane jest słowo x o długości n nad alfabetem {d,i,k,s}.

a) **[8 punktów]** Zaproponuj wydajny algorytm, który obliczy liczbę wszystkich różnych podsłów, słowa x, z których każde zawiera wszystkie litery z alfabetu {d, i, k, s}. Dla przykładu, w słowie ababa liczb wszystkich różnych podsłów zawierających każdą z liter a i b wynosi 7.

b) **[4 punkty]** Podaj ile wynosi najmniejsza, a ile największa wartość sumy elementów tablicy prefiksów-sufiksów dla słowa x (tablica P z algorytmu Knutha-Morrisa-Pratta), gdy n = 4k i każda z liter d, i, k, s pojawia się w słowie x dokładnie k razy.

Zadanie 4 [7 punktów]

W tym zadaniu rozważamy tylko domknięte odcinki równoległe do osi współrzędnych na płaszczyźnie, zadane przez współrzędne końców. Danych jest n odcinków, z których tylko odcinki prostopadłe mogą mieć punkt wspólny. Zaproponuj wydajny algorytm, który obliczy największą liczbę punktów przecięć jednego odcinka z innymi i wyznaczy wszystkie odcinki, które przecinają właśnie tyle innych odcinków.