

**Egzamin z ASD**  
**(03.02.2024)**

**Zadanie 1 [5 punktów]**

Do początkowo pustej listy wstawiamy  $n$  elementów o wartości 1, gdzie każda operacja wstawienia (operacja Wstaw) ma koszt stały. Następnie wykonujemy  $(n-1)$  operacji Połącz( $i$ ). Operacja Połącz( $i$ ),  $1 \leq i < \text{długość listy}$ , usuwa z listy elementy  $i$ -ty ( $a_i$ ) oraz  $(i+1)$ -szy ( $a_{i+1}$ ) i wstawia w ich miejsce jeden element będący sumą  $a_i + a_{i+1}$ , który staje się  $i$ -tym elementem listy. Oznacza to, że po każdym połączeniu lista staje się o 1 krótsza, a po  $(n-1)$  operacjach Połącz na liście jest już tylko jeden element (o wartości  $n$ ). Przyjmujemy, że koszt operacji Połącz to  $\min(a_i, a_{i+1})$ .

Dokonaj analizy kosztów zamortyzowanych operacji Wstaw i Połącz przy założeniu, że bezpośrednie operacje na liście (wstawianie i usuwanie) są wykonywane w czasie stałym.

**Zadanie 2 [12 punktów]**

Danych jest  $k$  uporządkowanych rosnąco ciągów  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . Zaprojektuj asymptotycznie optymalny algorytm sortujący wszystkie elementy w ciągach przy założeniu, że

- a) [8 punktów]  $|A_i| = i$ ,
- b) [4 punkty]  $|A_i| = 2^i$ .

W obu przypadkach rozmiarem zadania  $n$  jest suma długości ciągów do posortowania.

**Zadanie 3 [7 punktów]**

Zaprojektuj efektywny algorytm, który dla danego słowa  $x$  nad alfabetem  $\{d, i, k, s\}$  i liczby całkowitej  $s$ ,  $1 \leq s \leq |x|$ , znajdzie liczbę różnych podśłów, które w słowie  $x$  występują dokładnie  $s$  razy.

**Zadanie 4 [8 punktów]**

Niech  $X = \{1, \dots, 2^k\}$  dla pewnej liczby naturalnej  $k$ .

Zaprojektuj strukturę danych, reprezentującą rodzinę  $n \geq 1$  zbiorów  $S_i \subseteq X$ ,  $i=1..n$ , umożliwiającą wydajne wykonywanie następujących operacji:

Ini(): utwórz  $n$  pustych zbiorów  $S_i$ ,  $i=1, \dots, n$ ;

Dodaj( $i, x$ ):  $S_i := S_i \cup \{x\}$ ,  $1 \leq i \leq n$  oraz  $x \in X$ ;

Usuń( $i, x$ ):  $S_i := S_i \setminus \{x\}$ ,  $1 \leq i \leq n$  oraz  $x \in X$ ;

Wolny( $i, j$ ): jeśli  $|S_i| + |S_j| < |X|$ , to podaj dowolny element ze zbioru  $X \setminus (S_i \cup S_j)$ , wpp. nic nie rób.

Maksymalną liczbę punktów można uzyskać za pesymistyczne złożoności:

Ini:  $O(n \cdot |X|) = O(n \cdot 2^k)$ ;

Dodaj/Usuń/Wolny:  $O(\log |X|) = O(k)$ .

**Zadanie 5 [8 punktów]**

Niech  $G=(V, E)$  będzie  $n$ -wierzchołkowym dynamicznym grafem spójnym, gdzie  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ . Początkowo  $G$  jest drzewem zadanym przez  $n-1$  krawędzi  $a_1-b_1, \dots, a_{n-1}-b_{n-1}$ .

Zaprojektuj strukturę danych, która umożliwi efektywne wykonywanie co najmniej  $n$  następujących operacji na grafie  $G$ :

Ini(): inicjowanie struktury danych reprezentującej graf (tylko raz na samym początku);

Dodaj( $a, b$ ): dodaj krawędź  $a-b$  do grafu  $G$ , o której wiadomo, że w momencie dodawania nie jest krawędzią grafu;

W\_dwuspójnej( $a, b, c, d$ ): sprawdź, czy krawędzie  $a-b$  i  $c-d$  należą do tej samej dwuspójnej składowej grafu  $G$  (o  $a-b$  i  $c-d$  wiadomo, że są krawędziami grafu).

Uwaga: W każdym zadaniu uzasadnij poprawność swojego rozwiązania i dokonaj analizy złożoności zaproponowanych algorytmów.