

Egzamin z ASD
26.01.2026 r.

Zadanie 1 [10 punktów]

W tym zadaniu rozważamy tablicę $a[1..n]$ zawierającą n parami różnych liczb całkowitych, gdzie n jest liczbą całkowitą większą od 1. Jeżeli $a = [e_1, e_2, \dots, e_n]$, to przez $\text{Revers}(i)$, $1 \leq i \leq n$, oznaczamy operację odwrócenie kolejności występowania pierwszych i elementów w tablicy a . Po wykonaniu $\text{Revers}(i)$ mamy $a = [e_i, e_{i-1}, \dots, e_1, e_{i+1}, \dots, e_n]$.

- a) **[2 punkty]** Udowodnij, że tablicę a zawsze można posortować rosnąco za pomocą liniowej liczby (względem n) operacji Revers .
- b) **[3 punkty]** Wiadomo, że na uporządkowanej rosnąco tablicy a wykonano **dokładnie jedną** operację Revers . Zaproponuj **asymptotycznie optymalny ze względu na porównania** algorytm sortujący rosnąco tablicę a .
- c) **[5 punktów]** Zaproponuj efektywny algorytm, który dla danej tablicy a wyznaczy liniowy ciąg operacji Revers , po wykonaniu których tablica a zostanie posortowana rosnąco.

Zadanie 2 [10 punktów]

DAG to graf skierowany bez cykli. Niech $G = (V, E)$ będzie DAGiem. Ujściem w G nazywamy każdy wierzchołek bez wychodzących krawędzi, natomiast źródłem - każdy wierzchołek bez wchodzących krawędzi.

- a) **[2 punkty]** Jaka może być najmniejsza a jaka największa liczba krawędzi w n wierzchołkowym słabo spójnym DAGu o p źródłach i q ujściach, gdzie $n > 1$ oraz $p + q \leq n$.
- b) **[3 punkty]** Zaproponuj wydajny algorytm, który dla danego słabo spójnego DAGu o $n > 1$ wierzchołkach i p źródłach oraz q ujściach, wyznaczy zbiór nie więcej niż $p + q$ krawędzi, po dodaniu których dostaniemy graf silnie spójny ($p + q \leq n$).
- c) **[5 punktów]** Wiemy, że w DAGu G istnieje dokładnie jedno źródło s i dokładnie jedno ujście u . Zaproponuj wydajny algorytm, który wyznaczy ścieżkę z s do u (o ile istnieje), której długość jest podzielna przez 26.

Zadanie 3 [10 punktów]

- a) **[2 punkty]** Udowodnij, że dla każdego całkowitego $n > 0$ istnieje słowo nad alfabetem $\{a, b\}$, dla którego suma elementów odpowiadającej mu tablicy prefikso-sufiksów wynosi n .
[Bonus] Potrafisz skonstruować najkrótsze takie słowo?
- b) **[3 punkty]**
Słowo x nazywamy kwadratowym wtedy i tylko wtedy, gdy jest złączeniem dwóch takich samych słów. Dla przykładu słowo $abbabb$ jest słowem kwadratowym, natomiast słowo $abaabb$ już nie jest. Dla $n = 4k$, $k > 0$, podaj przykład słowa kwadratowego nad alfabetem $\{a, b\}$ zawierającego obie litery a, b i o największej sumie wartości z odpowiadającej mu tablicy prefikso-sufiksów.
- c) **[5 punktów]** Zaproponuj wydajny algorytm, który dla danego słowa x nad alfabetem $\{d, i, k, s\}$ o długości co najmniej 2 i dodatniej liczby całkowitej $k \leq |x|/2$, znajdzie liczbę różnych słów kwadratowych o długości $2k$ występujących w słowie x .

Zadanie 4 [10 punktów]

Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. W tym zadaniu rozpatrujemy ustalone z góry n -węzłowe drzewo binarne T , którego węzły zostały ponumerowane w kolejności „preorder” (korzeń, lewe poddrzewo, prawe poddrzewo). Węzły utożsamiamy z ich numerami. W każdym węźle drzewa przechowujemy jedną z dwóch wartości – 0 lub 1. Każde maksymalne poddrzewo binarne drzewa T

(bez możliwości rozszerzenia), w węzłach którego są same jedynki, nazywamy poddrzewem jedynkowym. Korzeniem poddrzewa jedynkowego jest zawsze węzeł o najmniejszym numerze w numeracji „preorder”.

- a) **[4 punkty]** Zaprojektuj strukturę danych, która umożliwia wydajne wykonanie on-line ciągu co najmniej n następujących operacji na drzewie T , które na początku zawiera **same zera**:
- Ini() :: zainicjuj strukturę danych;
 - Korzeń(i):: jeśli w węźle i jest jedynka („1”) podaj korzeń drzewa jedynkowego zawierającego ten węzeł;
 - DodajJedynkę(i):: zapisz jedynkę w węźle o numerze i .
- b) **[6 punktów]** Zaprojektuj strukturę danych, która umożliwia wydajne wykonanie on-line ciągu co najmniej n następujących operacji na drzewie T , które na początku zawiera **same jedynki**:
- Ini() :: zainicjuj strukturę danych;
 - Korzeń(i):: jeśli w węźle i jest jedynka („1”) podaj korzeń drzewa jedynkowego zawierającego ten węzeł;
 - UsuńJedynkę(i):: zapisz zero w węźle o numerze i .

Uwaga: Uzasadnij poprawność swoich rozwiązań i dokonaj analizy złożoności obliczeniowej zaproponowanych algorytmów.