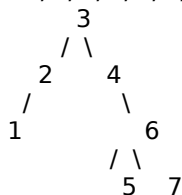


Egzamin z ASD 3.03.2014

Zadanie 1 [25 punktów]

Rozważmy rekurencyjny algorytm QuickSort sortujący różnowartościowe ciągi liczbowe w taki sposób, że elementem dzielącym jest zawsze pierwszy element sortowanego ciągu, a względny porządek elementów w sortowanych rekurencyjnie podciągach jest taki sam, jak w całym ciągu. Dla ustalonego ciągu, sortowanie można przedstawić w postaci drzewa binarnego, w którego węzłach są zapisywane elementy dzielące, a dla każdego węzła lewe poddrzewo zawiera elementy mniejsze od elementu dzielącego, natomiast prawe poddrzewo -- elementy większe. Takie drzewo nazywamy drzewem QS. Oto drzewo QS dla ciągu 3,4,2,1,6,7,5 (wysokość tego drzewa wynosi 3):



a)[4 punkty] Ile jest permutacji liczb 1, 2, 3, 4, 5, dla których drzewo QS ma wysokość 3?

b)[6 punktów] Dane jest n -węzłowe drzewo binarne T . Zaproponuj efektywny algorytm, który obliczy liczbę permutacji liczb 1, 2, ..., n , dla których drzewa QS i drzewo T są izomorficzne jako drzewa binarne. Możesz przyjąć, że operacje arytmetyczne są wykonywane w stałym czasie, niezależnie od wielkości argumentów.

c)[7 punktów] Zaprojektuj efektywny algorytm, który dla danych: dodatniej liczby całkowitej n , różnowartościowego ciągu liczb całkowitych długości n oraz liczby naturalnej k , $1 \leq k \leq n$, wyznaczy liczbę porównań w algorytmie QS, w których bierze udział k -ty element ciągu. W przykładzie powyżej 5-tym elementem ciągu jest 6 i bierze on udział w czterech porównaniach.

d)[8 punktów] Zaprojektuj algorytm, który dla danej permutacji liczb 1, 2, ..., n obliczy w czasie liniowym liczbę porównań wykonywanych przez algorytm QuickSort przy sortowaniu tej permutacji.

Zadanie 2 [15 punktów]

Dla permutacji p liczb naturalnych 1, 2, ..., n , grafem inwersji nazywamy graf $G_p = (\{1, 2, \dots, n\}, E)$, w którym $i-j$ jest krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy para i, j jest w inwersji w p .

a)[7 punkty] Zaprojektuj efektywny algorytm, który sprawdzi, czy dany graf $G = (\{1, 2, \dots, n\}, E)$ jest grafem inwersji dla pewnej permutacji p liczb naturalnych 1, 2, ..., n .

b)[8 punktów] Zaprojektuj efektywny algorytm, który dla danej permutacji p obliczy liczbę spójnych składowych w grafie G_p .

Uwaga: uzasadnij poprawność swoich rozwiązań i dokonaj analizy złożoności obliczeniowej zaproponowanych algorytmów