

### Zadanie 1 [22 punkty]

**1a) [5 punktów]** Niech  $S$  będzie  $n$ -elementowym zbiorem liczb całkowitych i niech  $d$  będzie nieujemną liczbą całkowitą. Zaproponuj efektywny algorytm, który znajduje w zbiorze  $S$  najliczniejszy podzbiór, w którym różnica między największym i najmniejszym elementem wynosi co najwyżej  $d$ .

Żałujemy teraz, że  $S$  jest dynamicznym, skończonym zbiorem liczb całkowitych. Początkowo zbiór  $S$  jest pusty. Na zbiorze  $S$  wykonujemy następujące operacje:

*Wstaw*( $S,x$ )::  $S := S \cup \{x\}$ ;

*Usuń*( $S,x$ )::  $S := S \setminus \{x\}$ ;

*Element*( $S,x$ ):: return ( $x \in S$ );

**1b) [7 punktów]** Zaproponuj strukturę danych umożliwiającą efektywne wykonanie  $2019n$  operacji *Wstaw*, *Element* i dodatkowo *Spójny*( $S$ ), której wynikiem jest liczność najliczniejszego podzbioru  $S$  złożonego z kolejnych liczb całkowitych przy założeniu, że elementy z  $S$  pochodzą z przedziału  $[1,n]$ ,  $n > 0$ .

**1c) [10 punktów]\*** Zaproponuj strukturę danych, która dla zadanej góry liczby całkowitej  $d$  z przedziału  $[0,n]$ ,  $n > 0$ , umożliwia efektywne wykonanie ciągu  $n$  operacji *Wstaw*, *Usuń*, *Element* i dodatkowo *Podzbiór*( $S$ ), której wynikiem jest liczność najliczniejszego podzbioru  $S$ , w którym różnica między największym i najmniejszym elementem wynosi co najwyżej  $d$ .

### Zadanie 2 [13 punktów]

**2a) [4 punkty]** Jaka może być najmniejsza głębokość liścia w AVL-drzewie o wysokości  $h$ ?

**2b) [4 punkty]** Podaj przykład AVL-drzewa i wskaż w nim element, którego usunięcie będzie wymagało wykonania dokładnie dwóch podwójnych rotacji.

**2c) [5 punkty]** Rozważamy algorytm usuwania klucza z wewnętrznego węzła BST-drzewa, w którym w przypadku gdy węzeł posiada dwójkę dzieci, klucz w węźle jest zastępowany przez najmniejszy klucz w prawym poddrzewie. Zaprojektuj efektywny algorytm wyznaczający ciąg kluczy, które zostaną usunięte kolejno z danego  $n$ -węzłowego BST-drzewa, jeśli usuwamy po kolei klucze znajdujące się w korzeniu drzewa.

### Zadanie 3 [5 punktów]

Dana jest plansza o rozmiarach  $1 \times n$ . Na planszy możemy położyć żeton lub przenieść żeton z jednego pola na inne. Jeśli powstaną dwa stosy żetonów o tej samej wysokości, to jeden z tych stosów jest zdejmowany z planszy. Położenie, przeniesienie lub zdjęcie jednego żetonu zajmuje jednostkę czasu. Jaki jest koszt zamortyzowany jednej operacji?

**Uwaga:** Uzasadnij poprawność swoich rozwiązań i przeprowadź analizę złożoności obliczeniowej zaproponowanych algorytmów.