

Egzamin z ASD

19.02.2024

Zadanie 1 [14 punktów]

W tym zadaniu rozważamy ciągi operacji na zmieniającym się grafie $G=(V,E)$, w którym $V = \{1, 2, \dots, n\}$ dla pewnej, dodatniej liczby całkowitej n .

- a) **[6 punktów]** Początkowo $E = \{1-2, 2-3, \dots, (n-1)-n\}$. Zaproponuj strukturę danych, która umożliwi efektywne wykonywanie operacji:

Ini(G):: zainicjuj strukturę danych;

Dodaj(i,j):: $E := E \cup \{i-j\}$, $2 \leq i+1 < j \leq n$;

Usuń(i,j):: $E := E \setminus \{i-j\}$, $2 \leq i+1 < j \leq n$;

PunktArtykulacji(i):: sprawdź, czy i jest punktem artykulacji, $1 \leq i \leq n$.

- b) **[5 punktów]** Początkowo graf $G=(V,E)$ jest grafem spójnym zadany przez listy sąsiedztwa. Dany jest z góry ciąg $k > n$ operacji ze zbioru:

Usuń(i,j):: $E := E \setminus \{i-j\}$, $1 \leq i < j \leq n$,

LiczbaSpójnych(G):: podaj liczbę spójnych składowych w aktualnym grafie G .

Zaproponuj wydajny algorytm, który obliczy odpowiedź na każde zapytanie o liczbę spójnych składowych.

- c) **[3 punkty]** Jaka jest najmniejsza możliwa wysokość DFS-drzewa w 16-wierzchołkowym grafie zawierającym cykl Hamiltona?

Uwaga: wysokość mierzymy liczbą krawędzi.

Zadanie 2 [8 punktów]

- a) **[3 punkty]** Udowodnij, że każdą dodatnią liczbę całkowitą można przedstawić jako sumę różnych liczb Fibonacciego.

Przypominamy, że $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

- b) **[5 punktów]** Na początkowo wyzerowanym liczniku binarnym $L[2..\infty]$ wykonujemy n operacji Inc() w taki sposób, że po wykonaniu k -tej operacji $k = \sum_{i=2}^{+\infty} F_i L[i]$, gdzie F_i jest i -tą liczbą Fibonacciego. Zaproponuj takie wykonanie operacji Inc, aby jej amortyzowany koszt był stały.

Zadanie 3 [12 punktów]

Niech $a[1..n]$ będzie tablicą n różnych liczb całkowitych. Dla dodatniego $k < n$, powiemy że a jest k -sortowalna, jeżeli można ją posortować wykonując co najwyżej k zamian par elementów.

- a) **[3 punkty]** Udowodnij, że liczba porównań potrzebnych do posortowania ciągu zapisanego w 1-sortowalnej tablicy $a[1..n]$ wynosi co najmniej $n-1$.
- b) **[3 punkty]** Zaproponuj optymalny algorytm ze względu na porównania sortujący ciąg zapisany w 1-sortowalnej tablicy $a[1..n]$.
- c) **[6 punktów]** Zaproponuj algorytm ze względu na porównania sortujący ciąg zapisane w k -sortowalnej tablicy $a[1..n]$ czasie $O(n \log k)$, dla danego nieujemnego $k < n$.

Zadanie 4 [6 punktów]

Dane jest słowo x nad alfabetem $\{d, i, k, s\}$, w którym litera s występuje co najmniej dwa razy. Zaprojektuj efektywny algorytm, który w słowie x znajduje najdłuższe dwa pod słowa (niekoniecznie różne), w których litera s występuje dokładnie na tych samych pozycjach.