

Egzamin z ASD

20.02.2025 r.

Zadanie 1 [12 punktów].

Dla dodatniej liczby całkowitej n , zygzakiem rzędu n nazywamy każdy ciąg x_1, x_2, \dots, x_n parami różnych liczb całkowitych spełniający warunek:

dla każdego $1 \leq i < n$ $x_i > \max(x_{i+1}, \dots, x_n)$ lub $x_i < \min(x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Niech $x[1..n]$ będzie tablicą, w której zapisano pewien zygzak rzędu n , tzn. $x[i]=x_i$.

a) [3 punkty] Zaproponuj wydajny algorytm, który obliczy liczbę wszystkich inwersji w tablicy x .

b) [5 punktów] Zaprojektuj wydajny, działający w miejscu algorytm, który w zygzaku zapisanym w tablicy $x[1..n]$ znajdzie dwa najbliższe sobie elementy, tzn. wartość bezwzględna ich różnicy jest najmniejsza.

c) [4 punkty] Niech P_n będzie zbiorem wszystkich permutacji liczb $1, 2, \dots, n$, które są zygzakami. Dokonaj analizy oczekiwanej liczby porównań wykonywanych podczas sortowania przez wstawianie losowego zygzaka z P_n .

Zadanie 2 [8 punktów].

W tym zadaniu rozważamy grafy dwudzielne.

a) [3 punkty] Jaka może być minimalna, a jaka maksymalna wysokość DFS-drzewa w n -wierzchołkowym dwudzielnym grafie dwuspójnym, dla $n > 3$.

b) [5 punktów] Zaprojektuj strukturę danych umożliwiającą wydajne wykonanie $m > n$ on-line operacji na dynamicznie rozrastającym się dwudzielnym MULTIGRAFIE $G=(\{1, 2, \dots, n\}, E)$:

Ini:: $E :=$ zbiór pusty; // tylko raz na samym początku

Dodaj($u-v$):: sprawdź, czy $G=(V, E \cup \{u-v\})$ jest nadal dwudzielny i jeśli tak, dodaj krawędź $u-v$ do grafu,

Ile():: podaj liczbę spójnych składowych w grafie G zawierających wierzchołek stopnia 1.

Zadanie 3 [6 punktów]

Dany jest acykliczny graf skierowany (dag) $G=(V,E)$. Wierzchołek $w \in V$ jest przodkiem wierzchołka $u \in V$, gdy istnieje skierowana ścieżka z u do w . Najbliższym wspólnym przodkiem wierzchołków $u \in V$ i $v \in V$ nazywamy wierzchołek $w \in V$, który jest przodkiem u i v oraz nie istnieje inny przodek u i v , którego przodkiem jest w . Najbliższy wspólny przodek dla pary wierzchołków nie musi być jednoznacznie wyznaczony.

Zaproponuj wydajny algorytm znajdujący w danym dagu $G=(V,E)$ najbliższego wspólnego przodka dla danych wierzchołków $u, v \in V$.

Zadanie 4 [14 punktów].

W tym zadaniu rozważmy skończone słowa nad alfabetem $\{a, b\}$. Zaproponuj wydajne algorytmy rozwiązujące następujące problemy.

- [3 punkty] Dla danego słowa $s[1..n]$, $n > 1$, oblicz liczbę pozycji $1 \leq i < j \leq n$ takich, że podśłowo $s[i..j]$ zawiera tyle samo liter a co liter b .
- [7 punktów] Znajdź w słowie s podśłowo długości $2k$, gdzie $2 \leq 2k < n$, które zawiera taką samą liczbę liter a i b oraz występuje w s najczęściej.
- [4 punkty] Zaprojektuj strukturę danych umożliwiającą wykonanie na dynamicznym słowie s wydajne wykonanie następujących operacji w trybie on-line:

Ini:: $s=[]$ // słowo puste,

Ins(x,i):: dodaj symbol $x \in \{a, b\}$ na i -tą pozycję w słowie,

Del(x,i):: usuń symbol z pozycji i -tej w słowie,

a-Strings():: podaj liczbę różnych podśłów zbudowanych tylko z liter a .