

Egzamin 2 z ASD
21.02.2026 r.

Zadanie 1 [12 punktów]

W tym zadaniu rozważamy tablicę $a[1..n]$ zawierającą n parami różnych liczb całkowitych, gdzie n jest liczbą całkowitą większą od 1. Jeżeli $a = [e_1, e_2, \dots, e_n]$, to przez $\text{Revers}(i, j)$, $1 \leq i \leq j \leq n$, oznaczamy operację odwrócenie kolejności elementów w podtablicy $a[i, \dots, j]$.

Dla przykładu, w wyniku wykonania $\text{Revers}(3, 5)$ na tablicy $a = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$ dostaniemy $a = [1, 2, 5, 4, 3, 6]$.

- a) **[3 punkty]** Wiadomo, że na uporządkowanej rosnąco tablicy a wykonano **dokładnie jedną** operację Revers . Zaproponuj **optymalny ze względu na porównania** algorytm sortujący rosnąco tablicę a .
- b) **[4 punktów]** Wiadomo, że na uporządkowanej rosnąco tablicy a wykonano **dokładnie k** operacji Revers , $0 < k \leq n$. Udowodnij, że liczba porównań niezbędna do posortowania rosnąco a wynosi co najmniej $\Omega(k \log k + n)$.
- c) **[5 punktów]** Zaproponuj efektywny algorytm, który posortuje tablicę a , o której mowa w punkcie b), w czasie $O(n \log k)$

Zadanie 2 [11 punktów]

Dla całkowitej liczby $n > 1$ linią L_n nazywamy graf skierowany (V_n, E_n) taki, że $V_n = \{1, 2, \dots, n\}$ i $E_n = \{1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, \dots, (n-1) \rightarrow n\}$.

- a) **[2 punkty]** Do linii L_{2026} dodajemy 1000 nowych, różnych krawędzi, ale nie pętli (krawędzi typu $i \rightarrow i$). Jaka jest najmniejsza, a jaka największa możliwa liczba silnie spójnych składowych w nowym grafie?

W zadaniach b) i c) rozpatrujemy dynamicznie zmieniający się graf skierowany $G = (V, E)$, który początkowo jest równy L_n , dla pewnego $n > 1$.

- b) **[4 punkty]** Zaprojektuj strukturę danych, która umożliwia wydajne wykonywania co najmniej n następujących operacji na grafie G :
 $\text{Ini}()$:: inicjalizacja struktury danych,
 $\text{Add}(j, i)$:: dodaj krawędź $j \rightarrow i$, o której wiadomo, że nie ma jej w grafie i przy założeniu $1 \leq i < j \leq n$,
 $\text{SC}(i, j)$:: odpowiedź, czy wierzchołki należą do tej samej silnie spójnej składowej.
- c) **[5 punktów]** Zaprojektuj strukturę danych, która umożliwia wydajne wykonywania następujących operacji na grafie G :
 $\text{Ini}()$:: inicjalizacja struktury danych,
 $\text{Add}(i, j)$:: dodaj krawędź $i \rightarrow j$, o ile nie ma jej w grafie i przy założeniu $1 \leq i \neq j \leq n$,
 $\text{Remove}(i, j)$:: usuń krawędź $i \rightarrow j$, o ile jest w grafie i przy założeniu $i+1 \neq j$,
 $\text{SingleSC}(i)$:: odpowiedź, czy wierzchołek i tworzy jednowierzchołkową silnie spójną składową.

Zadanie 3 [9 punktów]

W tym zadaniu rozważamy słowa o długości $n > 2$ zbudowane z liter a i b i zakończone symbolem $\$$.

- a) **[3 punkty]** Jaka jest najwyższa, a jaka najniższa wysokość drzewa sufiksowego dla tego rodzaju słowa o długości 6. Uwaga: wysokość mierzymy liczbą krawędzi.
- a) **[6 punktów]** Zaproponuj wydajny algorytm, który dla danego słowa x o długości co najmniej 3 i dodatniej liczby całkowitej $k \leq |x|/2$, znajdzie liczbę różnych palindromów o długości $2k$ występujących w słowie x .

Zadanie 4 [8 punktów]

- a) **[4 punkty]** Dla $n > 1$ dana jest tablica $a[1..n]$ liczb całkowitych z przedziału $[1..n^2]$. Zaprojektuj efektywny algorytm, który dla zadanych dodatnich liczb całkowitych m i k obliczy ile jest par (i, j) takich, że $1 \leq i < j \leq n$, $j \leq i+m$ oraz $|a[i] - a[j]| = k$.
- b) **[4 punkty]** Wiadomo, że w tablicy $a[1..n]$ zapisano tylko liczby całkowite z przedziału $[1..2026]$. Zaprojektuj efektywny algorytm **działający w miejscu**, który dla zadanych dodatnich liczb całkowitych $m < n$ i $k < 2026$ obliczy ile jest par (i, j) takich, że $1 \leq i < j \leq n$, $j \leq i+m$ oraz $|a[i] - a[j]| = k$.

Uwaga: Uzasadnij poprawność swoich rozwiązań i dokonaj analizy złożoności obliczeniowej zaproponowanych algorytmów.