Klasówka z Algorytmów i Struktur Danych
4.12.2003

1. (10 punktów)
Rozważmy zbiór punktów na płaszczyźnie $S = \{(x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)\}$, w którym $y_i < y_{i+1}$, dla każdego $0 < i < n$. Powiemy, że punkt $(x_i, y_i) \in S$ jest punktem *brzegowym*, jeśli półprosta $\{(x_i, y) : y \geq y_i\}$ nie przecina żadnego odcinka łączącego dwa kolejne punkty z S o indeksach większych od i.

   (a) (5 punktów)
   Na początkowo pustym zbiorze punktów S wykonujemy ciąg operacji *Wstaw*(x, y) i *Ile*, zawierający n operacji *Wstaw*.

   Operacja *Wstaw* wstawia do S nowy punkt (x, y). O wartościach x, y wiadomo, że są liczbami całkowitymi spełniającymi nierówności $0 \leq x, y \leq n$. Dodatkowo zakładamy, że każdy kolejny argument y operacji *Wstaw* jest ostro większy od poprzedniego.

   Operacja *Ile* odpowiada na pytanie, ile jest punktów brzegowych w aktualnym zbiorze S.

   Zaproponuj (efektywne) algorytmy wykonywania operacji *Wstaw* i *Ile* oraz dokonaj analizy ich kosztu zamortyzowanego.

   (b) (5 punktów)
   Załóżmy, że wykonano n operacji *Wstaw* i przez każdy punkt brzegowy poprowadzono proste pionową i poziomą. Osie OX i OY oraz proste poprowadzone przez punkty brzegowe wyznaczają pewną liczbę prostokątów o parami rozłącznych wnętrzach. Zaprojektuj algorytm wyznaczający ten z prostokątów (tzn. wyznaczający współrzędne jego wierzchołków), który w swoim wnętrzu zawiera największą liczbę punktów ze zbioru S. Jeśli jest wiele takich prostokątów, to wystarczy podać tylko jeden z nich.

   Dokonaj analizy złożoności swojego algorytmu.

2. (5 punktów)
Zaproponuj efektywny algorytm sortowania różnowartościowego ciągu liczb $a[1..n]$, o którym wiadomo, że można go podzielić na dwa podciągi rosnące ($n > 1$). Dokonaj analizy złożoności swojego algorytmu – czasowej i pamięciowej. dzielimy zachłannie i scalamy O(n)

3. (5 punktów)
Zaprojektuj strukturę danych dla skończonego multizbioru liczb całkowitych S, umożliwiającą efektywne wykonywanie następujących operacji:

   O(lgn) ← • Insert(S, x) — dodaj x do zbioru S.
   O(1) ← • Median(S) — podaj element, który jest medianą zbioru S, tzn. jest $\lceil \frac{|S|}{2} \rceil$-tym elementem w kolejności niemalejącej.
   O(lgn) ← • DelMed(S) — usuń medianę z S.

Najwyżej punktowana będzie bezwskaźnikowa struktura danych ukryta w tablicy.

1 2 6 7 3 2 4 9 5

1 2 6 7 5 3
9 8 4 5

1 5 7 9 8 4 3 2