Klasówka 1 z ASD
(25.XI.2021)

Zadanie 1 [7 punktów]

Powiemy, że zbiór n liczb całkowitych jest *prawie gęsty*, jeśli zawiera podzbiór o rozmiarze większym niż $n/3$, w którym różnica pomiędzy największym i najmniejszym elementem jest mniejsza od n. Taki podzbiór nazywamy *świadectwem*.
Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz n-elementowy zbiór liczb całkowitych S. Zaproponuj algorytm, który w czasie liniowym sprawdzi, czy S jest prawie gęsty.

Uwaga: 3 punkty uzyskasz za algorytm, który w czasie liniowym sprawdza, czy wskazany, dowolny element z S należy do jakiegoś świadectwa.

Zadanie 2 [6 punktów]

Zaproponuj optymalny ze względu na porównania algorytm sortowania siedmioelementowego ciągu $x_1, \ldots, x_7$, o którym wiadomo, że $x_1 < x_2$, $x_1 < x_3$, $x_4 < x_5$, $x_4 < x_6$. Udowodnij optymalność swojego algorytmu.

Zadanie 3 [7 punktów]

Dla dodatniej liczby całkowitej n kratownicą M_n nazywamy skierowany graf (V,E) bez pętli, w którym $V = \{(x,y)\colon x = 0, 1, \ldots, n$ oraz $y = 0, 1, \ldots, n\}$ i $E = \{(x,y) \longrightarrow (x',y')\colon 0 <= x'-x <= 1$ oraz $0 <= y'-y <= 1\}$. Wierzchołki grafu M_n pomalowano na biało lub czarno. *Białą ścieżką* nazwiemy każdą ścieżkę, na której wszystkie wierzchołki są białe. Dane są liczba całkowita $n > 0$, nieujemna liczba całkowita $m <= (n+1)^2$ oraz m różnych, białych wierzchołków (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_m, y_m). Pozostałe wierzchołki są czarne. Zaproponuj wydajny (czasowo i pamięciowo) algorytm, który obliczy liczbę wszystkich białych ścieżek z wierzchołka (0,0) do wierzchołka (n,n).

Uwaga: uzasadnij poprawność zaproponowanych rozwiązań oraz przeprowadź analizę złożoności obliczeniowej podanych algorytmów.