

Zadania z klasówki 1

Zadanie 1 [10 punktów]

Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą postaci $2^{h+1}-1$, gdzie h jest nieujemną liczbą całkowitą. O ciągu parami różnych liczb całkowitych $C = \langle c_1, c_2, \dots, c_n \rangle$ powiemy, że jest **pełny**, jeżeli po wstawieniu do początkowo pustego drzewa wyszukiwań binarnych, kolejno elementów ciągu C , dostaniemy pełne drzewo binarne.

Przykład

Ciąg $\langle 4, 6, 7, 2, 3, 5, 1 \rangle$ jest ciągiem pełnym, natomiast ciąg $\langle 4, 7, 6, 2, 3, 5, 1 \rangle$ już nie.

- [4 punkty]** Zaproponuj optymalny ze względu na porównania algorytm sortujący 7-elementowe ciągi pełne.
- [2 punkty]** Udowodnij, że każdy algorytm sortujący n -elementowe ciągi pełne wymaga w pesymistycznym przypadku $\Omega(n \log n)$ porównań.
- [4 punkty]** Niech $a[1..n]$ będzie tablicą, w której zapisano pełny ciąg C ($a[j] = c_j$). Zaproponuj algorytm, który dla zadanego k , $1 \leq k \leq n$, znajduje k -ty co do wielkości element w ciągu C . Twój algorytm powinien działać w miejscu i wykonywać mniej niż n porównań między elementami ciągu.

Zadanie 2 [6 punktów]

Dla słowa $s = [s_1, s_2, \dots, s_k]$ i liczby całkowitej j , $0 \leq j < k$, j -tym przesunięciem cyklicznym słowa s nazywamy słowo $\text{Cycl}_j(s) = [s_{j+1}, s_{j+2}, \dots, s_k, s_1, \dots, s_j]$.

Dla dodatnich liczb całkowitych n, k danych jest n słów W_1, W_2, \dots, W_n nad alfabetem

$\{1, 2, \dots, n\}$, każde o długości k . Zaprojektuj algorytm, który w łącznym czasie $O(nk)$ znajdzie dla każdego $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$, najmniejsze leksykograficzne przesunięcie cykliczne wśród j -tych przesunięć słów W_1, W_2, \dots, W_n .

Zadanie 3 [4 punkty]

Na **maszynie klasówkowej** mamy do wykonania cztery typy zadań: A, B, C i D. Wykonanie zadań typu A, B, C, D zajmuje odpowiednio czasy a, b, c, d . Czasy wykonania zadań są dodatnimi liczbami całkowitymi. Na maszynie mamy zarezerwowany czas t (dodatnia liczba całkowita). Przestoje na maszynie są bardzo kosztowne. Dlatego naszym celem jest minimalizacja łącznego czasu przestoju i przy minimalnym czasie przestoju wykonanie jak największej liczby zadań.

Zaprojektuj algorytm, który dla danych a, b, c, d i t policzy w czasie $O(t)$ minimalny czas przestoju i dla tego czasu wyznaczy maksymalną liczbę zadań, które można wykonać na maszynie klasówkowej.

Uwaga: Uzasadnij poprawność swoich rozwiązań i dokonaj analizy złożoności obliczeniowej zaproponowanych algorytmów.