

• Zadanie 1 (4 pkt.) *korz niem zastaj xmal pierwszy element*  
 Niech  $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$  będzie drzewem poszukiwań binarnych powstałym w wyniku wstawienia do początkowo pustego drzewa kolejno  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Dla ilu permutacji  $[a_1, a_2, \dots, a_{2^k-1}]$  liczb  $1, 2, \dots, 2^k - 1$  wysokość drzewa  $T(a_1, a_2, \dots, a_{2^k-1})$  wynosi  $k - 1$ ? Odpowiedź uzasadnij.

• Zadanie 2 (8 pkt.) Na osi liczbowej umieszczane i usuwane są punkty białe i czarne. Zaprojektuj strukturę danych umożliwiającą efektywne wykonywanie następujących operacji:

- $O(1)$   
 $O(\log n)$   
 $O(\log n)$   
 $O(\log n)$   
 $O(\log n)$
- $utw\acute{o}rz(S)$ : utwórz pusty zbiór punktów;
  - $dodaj(S, x, k)$ : dodaj do  $S$  punkt koloru  $k$  o współrzędnej  $x$ ;
  - $usuń(S, i)$ : usuń z  $S$   $i$ -ty punkt co do wartości współrzędnej;
  - $licz(S, k, i, j)$ : podaj liczbę punktów o kolorze  $k$  między  $i$ -tym a  $j$ -tym punktem (włącznie);
  - $nast(S, i)$ : zwróć następny po  $i$ -tym punkt tego samego koloru.

Zadanie 3 (8 pkt.)

Niech  $M$  będzie maszyną Turinga o lewostronnie ograniczonej taśmie i 2 głowicach, które poruszają się (lub nie) *tylko w prawo*. Początkowo głowice są na początku taśmy. Zasymuluj działanie maszyny na kilku stosach tak, aby możliwe było wykonanie następujących operacji:

- $przesuń(T_1, T_2)$ : przesunięcie głowic odpowiednio o  $T_1$  i  $T_2$  pozycji, gdzie  $T_1, T_2 \in \{0, 1\}$ ;
- $zmiień(x, y)$ : zamiana zawartości aktualnie odwiedzanych komórek na odpowiednio  $x$  i  $y$ ;
- $czytaj$ : czytanie zawartości komórek wskazywanych przez głowice.

Uwaga: W miarę możliwości algorytmy należy opisywać słowami, ale na tyle precyzyjnie, żeby można było zanalizować ich złożoność. Każde zadanie należy oddać na oddzielnej i podpisanej kartce.