ASD: klasówka 2
13.01.2004

Uwaga:

- rozwiązania oddajemy na kartkach a4 w środę, 14-go stycznia, od godziny 10-tej do godziny 11-tej, w pokoju 5660 – każde zadanie na oddzielnej kartce;
- rozwiązanie każdego zadania musi być podpisane i zmieścić się na co najwyżej dwóch stronach;
- za każdy błąd ortograficzny zostanie odjęty jeden punkt;
- zadania rozwiązujemy samodzielnie; zachowujemy się honorowo i do zakończenia klasówki nie rozmawiamy na temat zadań.

1. 12 punktów

Grafem trójkątnym nazywamy każdy graf płaski (graf narysowany na płaszczyźnie, w którym jedynymi wspólnym punktami różnych krawędzi są ich końce) zdefiniowany następująco:
- trójkąt jest grafem trójkątnym;
- jeżeli G jest grafem trójkątnym, to graf otrzymywany z G przez umieszczenie wierzchołka (punktu) wewnątrz dowolnej ściany wewnętrznej (trójkąta bez żadnych wierzchołków w jego wnętrzu) i połączenie go odcinkami z wierzchołkami tej ściany, jest też grafem trójkątnym;
- żaden inny graf nie jest grafem trójkątnym.

Zaprojektuj strukturę danych, która umożliwia efektywne wykonywanie następujących operacji na dynamicznym trójkątnym grafie G:

O(1) • Ini:: inicjalizacja grafu G jako pojedynczego trójkąta o wierzchołkach ponumerowanych 1, 2, 3; ta operacja jest wykonywana tylko raz na samym początku;

O(log n) • Dodaj(a, b, c):: sprawdź, czy w grafie G istnieje cykl elementarny (trójkąt) $[a, b, c]$; jeśli tak i wewnątrz tego cyklu (trójkąta) nie leżą żadne inne wierzchołki grafu, to dodaj nowy wierzchołek wewnątrz trójkąta $[a, b, c]$, połącz go krawędziami (odcinkami) z wierzchołkami a, b, c i nadaj mu etykietę równą najmniejszej dodatniej liczbie całkowitej różnej od pozostałych etykiet wierzchołków w grafie;

Paweł.

- $O(n\log n)$ $1ch: O(\log n)$ Usuń(a, b, c):: sprawdź, czy w G istnieje cykl elementarny (trójkąt) $[a, b, c]$; jeśli tak, to usuń z G wszystkie wierzchołki leżące wewnątrz cyklu (trójkąta) $[a, b, c]$ oraz krawędzie incydentnę z tymi wierzchołkami;
- $1ch$ $O(\log n)$ Ile(a, b, c):: sprawdź, czy w grafie istnieje cykl elementarny (trójkąt) $[a, b, c]$; jeśli tak, to podaj liczbę wierzchołków leżących wewnątrz cyklu (trójkąta) $[a, b, c]$.

Uzasadnij poprawność swojego rozwiązania i dokonaj analizy czasów wykonywania poszczególnych operacji.
Uwaga: Można uzyskać 12 punktów za rozwiązanie przy założeniu, że operacja Usuń nie ma miejsca. Dodatkowa premia dla osób, które uwzględnią operację Usuń – przedyskutują sytuację w tym przypadku i zaproponują efektywne rozwiązanie.

2. 8 punktów
W n-węzłowym drzewie poszukiwań binarnych liczba węzłów zewnętrznych ("nili") wynosi $n + 1$. Każdy nowy klucz zajmuje pozycję jednego z węzłów zewnętrznych. Zaprojektuj efektywny algorytm, który dla danego AVL-drzewa sprawdzi, ile jest w nim węzłów zewnętrznych, w których umieszczenie klucza wymaga wykonania rotacji w celu przywrócenia własności AVL-drzewa. Należy przyjąć, że atrybutami każdego węzła wewnętrznego są:
klucz, lewy_syn, prawy_syn, wsk_zrównoważenia.
Do drzewa odwołujemy się przez korzeń. Uzasadnij poprawność swojego rozwiązania i dokonaj analizy złożoności czasowej zaproponowanego algorytmu.