

Zadanie 1 (6 punktów)

Zaproponuj strukturę danych dla dynamicznego kolorowania lasu. Zakładamy, że liczba wierzchołków w lesie jest niezmienna i wynosi n . Możesz przyjąć, że wierzchołki są jednoznacznie identyfikowane przez liczby naturalne z zakresu $1..n$. Początkowo wszystkie drzewa w lesie są jednowierzchołkowe. Na lesie wykonywane są następujące operacje:

- $join(u,v)$: jeśli u i v należą do różnych drzew w lesie, to połącz te drzewa krawędzią $u-v$.
- $col(u)$: podaj kolor wierzchołka u .

Do kolorowania wierzchołków lasu można używać tylko dwóch kolorów. Kolory wierzchołków pomiędzy dwiema kolejnymi istotnymi operacjami $join$ (czyli takimi, które łączą dwa różne drzewa w jedno) nie mogą ulegać zmianie: za każdym razem gdy pytamy o kolor tego samego wierzchołka, to musimy dostać tę samą odpowiedź

Zaprojektuj efektywny sposób wykonywania obu operacji i zanalizuj złożoność zaproponowanych algorytmów. Podaj także, w jaki sposób Twoja struktura danych jest inicjalizowana, i podaj koszt inicjalizacji.

Zadanie 2 (9 punktów)

Dane jest n -wierzchołkowe drzewo binarne T , którego wierzchołki zostały ponumerowane w porządku *inorder*. Wierzchołki utożsamiamy z ich numerami. Dla każdego wierzchołka u mamy dane $left[u]$, $right[u]$ oraz $par[u]$, odpowiednio, lewego syna u , prawego syna u oraz ojca u . Jeśli taki wierzchołek nie istnieje, to wartością odpowiedniego pola jest 0 . Na drzewie T wykonujemy operacje:

- $rotate(u)$: jeśli u nie jest korzeniem ($par[u] \neq 0$), to wykonaj pojedynczą rotację u z ojcem.
- $depth(u)$: podaj głębokość u w aktualnym drzewie.

Zaprojektuj efektywny sposób wykonywania obu operacji i dokonaj analizy złożoności zaproponowanych przez siebie algorytmów.

Zadanie 3 (5 punktów)

Poniżej podano ciąg wskaźników zrównoważenia (wys. lewego podrzewa – wys. prawego podrzewa) pewnego AVL-drzewa, wypisany w kolejności *inorder*:

(2 punkty)

0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0

(3 punkty)

-1,0,1,0,0,0,1,1,0,1,0,1,0,-1,0

Narysuj AVL-drzewa, którym odpowiadają te ciągi.

Bonus (10 punktów)

Udowodnij, że dwóm różnym AVL-drzewom odpowiadają różne ciągi wskaźników.

Zaproponuj efektywny algorytm odtwarzania z danego ciągu odpowiadającego mu drzewa i dokonaj analizy jego złożoności.