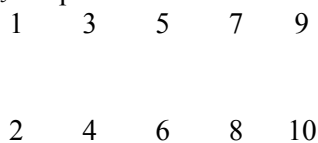


ASD – klasówka II  
13.01.2014

W zadaniach 1 i 2 obiektem badań jest graf nazywany *drabiną*. Dla dodatniej liczby całkowitej  $n$ , drabiną  $D_n$  nazywamy graf nieskierowany o  $2n$  wierzchołkach, ponumerowanych  $1, 2, \dots, 2n$ , i krawędziach postaci:

$$(2i-1)-(2i), \text{ dla każdego } i = 1, 2, \dots, n, \text{ oraz} \\ (2i-1)-(2i+1), (2i)-(2i+2), \text{ dla każdego } i = 1, \dots, n-1.$$

Drabina  $D_5$  ma postać:



Zadanie 1 [6 pkt]

Na potrzeby tego zadania BFS-drzewem o korzeniu w wyróżnionym wierzchołku  $s$  nazywamy każde drzewo w którym ojciec każdego wężła  $v$  różnego od  $s$  jest pierwszym węzłem na pewnej najkrótszej ścieżce z  $v$  do  $s$ , natomiast DFS-drzewem o korzeniu w wierzchołku  $s$  nazywamy każde drzewo, w którym krawędzie niedrzewowe łączą potomków z przodkami.

O dwóch drzewach z korzeniami, rozpiętych na tych samych zbiorach wierzchołków, mówimy, że są różne, gdy co najmniej jeden wierzchołek ma różnych ojców w obu drzewach.

- [1 pkt] Ile jest różnych BFS-drzew w drabinie  $D_5$  o korzeniu w wierzchołku 5?
- [2 pkt] Ile jest różnych DFS-drzew w drabinie  $D_5$  o korzeniu w wierzchołku 5?
- [3 pkt] Ile jest różnych BFS-drzew w drabinie  $D_n$  o korzeniu w wierzchołku 1?

Zadanie 2 [8 pkt]

- [3 pkt] Załóżmy, że każdej krawędzi  $e$  drabiny  $D_n$  przypisano dodatnią, całkowitoliczbową wagę  $w(e)$ . Zaproponuj efektywny algorytm obliczania najlżejszej ścieżki z wierzchołka 1 do wierzchołka  $2n$ .
- [5 pkt] Zaproponuj strukturę danych, która na drabinie  $D_n$  z wagami umożliwi efektywne wykonywanie następujących operacji:  
*Ini*: zainicjuj strukturę danych; pierwsza operacja, wykonywana tylko raz;  
*Zmień( $e, y$ )*:: zmień wagę krawędzi  $e$  na nową o wartości  $y$ ;  
*Najlżejsza*:: podaj wagę najlżejszej ścieżki z wierzchołka 1 do wierzchołka  $2n$ .

Zadanie 3 [6 pkt]

Do początkowo pustego AVL-drzewa wstawiamy kolejno klucze  $1, 2, \dots, n$ , gdzie  $n$  jest dodatnią liczbą całkowitą. Podaj klucze, które kiedykolwiek znajdą się w korzeniach kolejno powstających drzew.

**Uwaga:** uzasadnij poprawność swoich rozwiązań oraz dokonaj analizy złożoności obliczeniowej zaproponowanych algorytmów. Rozwiązanie każdego zadania oddajemy na osobnej kartce (kartkach).