

Klasówka z ASD
11.01.2018

Zadanie 1 [10 punktów]

Niech S będzie skończonym podzbiorem różnych, dodatnich liczb całkowitych, a d dodatnią liczbą całkowitą.

- a) [5 punktów] Przyjmij, że elementy zbioru zapisano w uporządkowanej malejąco tablicy $a[1..n]$, gdzie $n = |S|$. Zaprojektuj wydajny algorytm, który policzy liczbę (nieuporządkowanych) par różnych elementów z S , których suma jest nie większa od d .

Przykład

Dla $S = \{6, 5, 2, 1\}$ i $d = 7$, liczba takich par wynosi 4.

- b) [5 punktów] Załóżmy, że d jest ustalone (ale może być bardzo duże), natomiast S jest zbiorem dynamicznym. Zaprojektuj efektywną strukturę danych, która umożliwi wydajne wykonywanie na zbiorze S następujących operacji:

Ini(S):: $S := \emptyset$; // operacja wykonywana raz, na samym początku obliczeń;

Insert(x, S):: $S := S \cup \{x\}$;

Delete(x, S):: $S := S \setminus \{x\}$;

Pairs(S):: return # par różnych elementów z S , których suma jest nie większa od d .

Zaproponuj rozwiązanie, w którym operacje Insert i Delete są wykonywane w czasie $O(\log |S|)$, a operacja Pairs w czasie stałym, niezależnie od wielkości d . Możesz przyjąć, że operacje arytmetyczne i porównania na liczbach wykonywane są w stałym czasie.

Zadanie 2 [6 punktów]

Danych jest 2018 monet ułożonych w stosach na okręgu, po dwie monety w każdym. Dokładamy kolejno po jednej, **nowej** monecie, kładąc ją na szczycie dowolnego stosu. Jeśli po położeniu **nowej** monety stos, na którym się właśnie znalazła, będzie co najmniej dwukrotnie wyższy od KAŻDEGO z sąsiednich stosów, to przekładamy z niego na inne stosy tyle monet, ile jest na wyższym z sąsiadów, umieszczając je zgodnie z ruchem wskazówek zegara, po jednej monecie na KOLEJNYCH stosach, począwszy od dowolnie wybranego miejsca (możemy wielokrotnie obejść okrąg). Oszacuj zamortyzowany koszt dołożenia jednej, **nowej** monety. Za operację elementarną przyjmij położenie monety na stosie.

Zadanie 3 [3 punkty]

- a) [1 punkty] Jaka jest maksymalna liczba węzłów (wewnętrznych) w AVL-drzewie o wysokości h ?
- b) [2 punkty] Załóżmy, że kluczami w AVL drzewie są kolejne liczby naturalne 1, 2, Jaki najmniejszy, a jaki największy klucz może znaleźć się w korzeniu AVL-drzewa o wysokości h ?

Uwaga: uzasadnij poprawność swoich rozwiązań i dokonaj analizy złożoności zaproponowanych algorytmów.