

Klasówka 2 z ASD

(12.01.2023)

Zadanie 1 [2 punkty]

Podaj największe takie d , że każde AVL-drzewo o wysokości $h = 2023$ do głębokości d jest pełnym drzewem binarnym.

Uwaga: głębokości i wysokości drzew liczymy w liczbach krawędzi.

Zadanie 2 [6 punktów]

Zaprojektuj strukturę danych, która na początkowo pustym, dynamicznym zbiorze S **dodatnich** liczb całkowitych, pozwala wydajnie wykonywać następujące operacje:

- INI(): $S := \emptyset$ (wykonywana tylko raz, na samym początku)
- INSERT(n): $S := S \cup \{n\}$
- DELETE(n): $S := S \setminus \{n\}$
- SEARCH(n): sprawdź, czy n jest w zbiorze S
- MAX(): jeśli S jest niepusty, to podaj największą liczbę w zbiorze S
- INCREASE(i): jeśli S jest niepusty dodaj MAX() do i najmniejszych elementów w zbiorze, $1 \leq i \leq |S|$

Zadanie 3 [12 punktów]

Grafem klikowym nazywamy spójny, nieskierowany graf, w którym każda dwuspójna wierzchołkowo składowa jest kliką (grafem pełnym).

- a) [2 punkty] Jaka jest maksymalna, a jaka minimalna wysokość DFS-drzewa w 2023-wierzchołkowym grafie klikowym, zawierającego dokładnie 3 dwuspójne składowe.
- b) [10 punktów] Dla liczby całkowitej $n > 1$ i liczby całkowitej k , $1 \leq k < n$, rozważmy n -wierzchołkowy graf klikowy G o zbiorze wierzchołków $\{1, 2, \dots, n\}$, w którym dwuspójne składowe ponumerowano $1, 2, \dots, k$. Zwartą reprezentacją grafu G , oznaczaną przez $Z(G)$, nazywamy zbiór wszystkich par (v, s_v) takich, że v jest wierzchołkiem grafu, natomiast s_v jest numerem dwuspójnej składowej, do której należy wierzchołek v .
 - b1) [2 punkty] Jaki jest rozmiar zbioru $Z(G)$?
 - b2) [2 punkty] Uzasadnij, że wysokość DFS-drzewa budowanego algorytmem rekurencyjnym na grafie zadanym przez listy sąsiedztwa zależy od kolejności wierzchołków na listach.
 - b3) [6 punktów] Dana jest zwarta reprezentacja $Z(G)$ grafu G . Zaproponuj wydajny algorytm, który wyznaczy DFS-numerację wierzchołków grafu (numerujemy wierzchołki w kolejności pierwszych odwiedzin) przy przeszukiwaniu od wierzchołka o numerze 1 i przy założeniu, że listy sąsiedztwa grafu G byłyby uporządkowane rosnąco.

Uwaga: uzasadnij poprawność swoich odpowiedzi i dokonaj analizy złożoności obliczeniowej zaproponowanych algorytmów.