Algorytmy i struktury danych – klasówka 2
(11.01.2024)

Zadanie 1 [7 punktów]
Blokiem w ciągu binarnym nazywamy każdy maksymalny, spójny podciąg złożony z tych samych cyfr - zer (0) lub jedynek (1).

Kompresją binarnego zapisu nieujemnej liczby całkowitej n nazywamy skończony ciąg nieujemnych liczb całkowitych K(n) zdefiniowany następująco:
- jeśli n = 0, to K(n) = <0>;
- dla n > 0, K(n) = $<e_1, e_2, \ldots, e_{k(n)}>$, gdzie e_1 jest długością bloku zbudowanego z najmniej znaczących zer, e_2 jest długością następnego bloku zbudowanego z jedynek, e_3 jest długością następnego bloku zbudowanego z zer itd. na przemian długości bloków jedynek i zer. Ostatni element ciągu $e_{k(n)}$ jest długością bloku zbudowanego z najbardziej znaczących jedynek. Gdy najmniej znaczącą cyfrą jest jedynka, to e_1 jest zawsze równe 0.

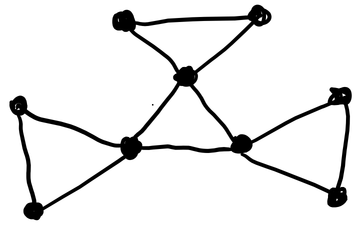
Przykład
K(0) = <0>, K(1) = <0, 1>, K(2) = <1, 1>, K(3) = <0, 2>, K(13) = <0, 1, 1, 2>.

Zaprojektuj strukturę danych, która umożliwia efektywne wykonywanie następujących operacji na kompresji K(n) dynamicznie zmieniającej się liczby n:

Ini:: n := 0; {operacja jest wykonywana tylko raz na samym początku}
Dodaj(j):: n := n + 2^j, gdzie j jest nieujemną liczbą całkowitą;
Odejmij(j):: n := n – 2^j, gdzie j jest nieujemną liczbą całkowitą taką, że $2^j \le n$;
Mod(j):: n := n mod 2^j, gdzie j jest nieujemną liczbą całkowitą;
MaxBlok():: podaj długość najdłuższego bloku w K(n).

Zadanie 2 [6 punktów]
Grafem trójkątów nazywamy graf spójny, w którym każda dwuspójna składowa jest cyklem o długości 3.

a) **[2 punkty]** Rozważmy następujący graf trójkątów:



Zaznacz w tym grafie DFS-drzewa odpowiednio o najmniejszej i największej wysokości.

b) **[4 punkty]** Zaprojektuj efektywny algorytm, który dla danego grafu trójkątów oblicza wysokość możliwie najwyższego DFS-drzewa.

Zadanie 3 [7 punktów]

Powiemy, że AVL-drzewo T jest wysoce niezrównoważone, jeśli dla każdego wierzchołka w drzewie T różnego od liścia (bez następników), wysokości jego poddrzew zawsze się różnią.

a) **[2 punkty]** Podaj wszystkie wartości $n \leq 100$, dla których istnieją wysoce niezrównoważone AVL-drzewa zawierające n wierzchołków.

Liczbę n, dla której istnieje n-wierzchołkowe wysoce niezrównoważone AVL-drzewo nazywamy liczbą wyjątkową.

Niech n będzie liczbą wyjątkową i niech $\langle k_1, k_2, \ldots, k_n \rangle$ będzie permutacją liczb 1, 2, …, n. Do początkowo pustego AVL-drzewa wstawiamy kolejno klucze $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

b) **[4 punkty]** Zaproponuj efektywny algorytm, który wyznaczy permutację $\langle k_1, k_2, \ldots, k_n \rangle$, dla której dostaniemy wysoce niezrównoważone AVL-drzewo.

c) **[1 punkt]** Dla ilu permutacji $\langle k_1, k_2, k_3, k_4 \rangle$ budując 4-wierzchołkowe AVL-drzewo nie wykonamy żadnej rotacji.